

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice.....	5
Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice.....	9
Lecția 3. Împărțirea fracțiilor algebrice.....	13
Lecția 4. Ridicarea la putere cu exponent natural a fracțiilor algebrice	17
Lecția 5. Ordinea efectuării operațiilor cu fracții algebrice și folosirea parantezelor.....	20
Lecția 6. Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	27
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	32
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	34

CAPITOLUL III. FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite	37
Lecția 8. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	42
Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice	47
Lecția 10. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice	53
Lecția 11. Elemente de statistică	56
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	60
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	61
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	63

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte	66
Lecția 2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment	70
Lecția 3. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă	74
Lecția 4. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane.....	79
Lecția 5. Plane perpendiculare	84
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	88
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	89

CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

II.1. POLIEDRE

Lecția 6. Prisma regulată.....	91
Lecția 7. Paralelipipedul dreptunghic.....	98
Lecția 8. Cubul.....	103
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	107
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	108

Lecția 9. Piramida regulată.....	110
Lecția 10. Trunchiul de piramidă regulată	118
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	125
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	127
II.2. CORPURI ROTUNDE	
Lecția 11. Cilindrul circular drept	129
Lecția 12. Conul circular drept.....	133
Lecția 13. Trunchiul de con circular drept	138
Lecția 14. Sfera	143
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	148
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	149
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	151
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR	155
TESTE DE EVALUARE FINALĂ	158
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ	161
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	188

ALGEBRĂ

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice



Citesc și rețin

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1. $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0$.

2. $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice $\frac{A(x)}{B(x)}$ și $\frac{C(x)}{D(x)}$;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

Observație: Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.



Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x}$;

b) $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x}$.

Soluție:

a) $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x} = \frac{x-1+3x-5}{4x} = \frac{4x-6}{4x} = \frac{2(2x-3)}{4x} = \frac{2x-3}{2x}$;

b) $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x(x+2)}{6x^2} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x^2+6x}{6x^2} = \frac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$
 $= \frac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \frac{1-6x}{6x^2}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Se consideră expresia $E(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{(x-1)^3 - (x-1)} - \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+1)^3 - (x+1)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Arătați că $E(x)$ nu depinde de x pentru orice x din domeniul de definiție.

17. Se consideră expresia $E(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{(x+1)^2}}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Rotunjiți la a patra zecimală numărul $n = E(2) + E(3) + E(4) + \dots + E(11)$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați:

a) $\frac{5x^2 - x}{x - 4} - \frac{4x^2 + 3x}{x - 4}$; b) $\frac{2x + 1}{6x} + \frac{4 - x}{3x - 9}$.

(3p) 2. Calculați $\frac{x + 1}{2x^2 - x} - \frac{2x + 3}{4x^2 - 1} + \frac{1}{x}$.

(3p) 3. Se consideră expresia $E(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice



Citesc și rețin

Înmulțirea fracțiilor algebrice $\frac{A(x)}{B(x)}$ și $\frac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, se efectuează

astfel: $\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}$.

Observație: Proprietățile înmulțirii fracțiilor ordinare se transferă și la înmulțirea fracțiilor algebrice.



Cum se aplică?

1. Efectuați următoarele înmulțiri:

a) $\frac{x + 2}{3x^3} \cdot \frac{4x + 1}{x - 2x^2}$; b) $\frac{x - 1}{x + 3} \cdot \frac{x + 1}{x + 3}$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați:

$$\text{a) } \left(\frac{9x-7}{10x^3} + \frac{6x+2}{10x^3} \right) : \frac{1}{4x}; \quad \text{b) } \frac{2x}{5} \cdot \left(\frac{3x^2-10}{6x^2} - \frac{4x+5}{8x} \right).$$

(3p) 2. Calculați $\frac{x+1}{x+2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{x^2+2x+1} \right)$.

(3p) 3. Se consideră expresia:

$$E(x) = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+4} - \left(\frac{1-x}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+3x} \right) : \frac{x-2}{4x-12} \right], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 2, 3\}.$$

a) Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $E(x) \geq 0$.

Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$



Citesc și rețin

Definiție: O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ (1) se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută**. Numerele a, b și c se numesc **coeficienții ecuației**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1) dacă $au^2 + bu + c = 0$ (u verifică ecuația).

A **rezolva ecuația** (1) înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au^2 + bu + c = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul II cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observație: Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației de forma $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuației (1):

A. Cazurile particulare

$$1. c = 0; \quad ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ sau } x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ deci } S = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$2. b = 0; \quad ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Dacă $\frac{c}{a} > 0$, atunci $S = \emptyset$.

$$\text{Dacă } \frac{c}{a} \leq 0, \text{ atunci } x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)\left(x + \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} \text{ și } x_2 = -\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \text{ deci } S = \left\{-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right\}.$$

B. Cazul general

Definiție: Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ se numește **discriminantul ecuației (1)**.

Pentru rezolvarea ecuației (1) în cazul general $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ procedăm astfel:

1. calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. ▪ dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții în \mathbb{R} , deci $S = \emptyset$;
- dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (1) are două soluții egale în \mathbb{R} :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ deci } S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

- dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația (1) are două soluții distincte în \mathbb{R} :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ deci } S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$



Cum se aplică?

1. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $3x^2 + 5x = 0$;

b) $4x^2 - 100 = 0$.

Soluție:

a) $3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$, deci $x = 0$ sau $3x + 5 = 0$; $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$, prin urmare $S = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$;

b) $4x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$, deci $x - 5 = 0$
sau $x + 5 = 0$; $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ și $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; prin urmare, $x \in \{-5, 5\}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

b) $(x - 1)^2 = -x(x + 5)$.

Soluție:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$, deci $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, prin urmare $\Delta = 0$.

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$, deci $S = \{-3\}$;

Capitolul III

FUNȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite



Citesc și rețin

Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide. O lege (un procedeu) f prin care se asociază fiecărui element din A un singur element din B se numește **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B .

Notăm $f: A \rightarrow B$ și citim „funcția f este definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B ”.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea B se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeul) f se numește **legea de corespondență** a funcției.

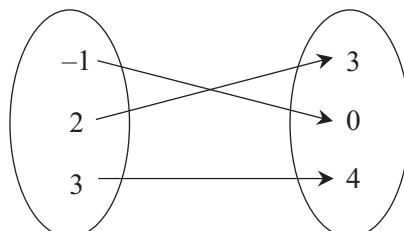
Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește **imaginea lui x prin funcția f** sau **valoarea funcției f în punctul x** .

Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

1. printr-o diagramă

Exemplu:



2. printr-un tabel

Exemplu:

x	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

Definiție: Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Mulțimea $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește **imaginea funcției f** sau **mulțimea valorilor funcției f** . $\text{Im } f \subset B$.

Definiție: Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcția f se numește **funcție numerică**.

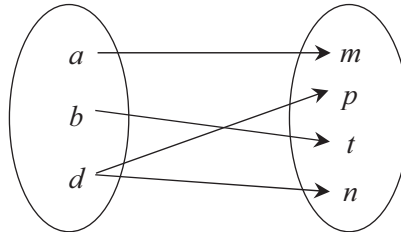
Definiție: Două funcții $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ se numesc **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

Notăm $f = g$ și citim „funcțiile f și g sunt egale”.



Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



Soluție:

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul d din domeniul de definiție are două imagini, p și n .

2. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 4\}$, $f(x) = x^2$. Determinați mulțimea $\text{Im } f$.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, prin urmare $\text{Im } f = \{0, 1, 4\}$.

3. Se consideră funcția $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \rightarrow A$, $g(x) = \frac{x}{2} + 5$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $g(-4)$ și $g(4)$.

b) Calculați media geometrică a numerelor $g(-6)$ și $g(6)$.

Soluție:

$$\text{a) } g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3 \text{ și } g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7; m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$\text{b) } g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2 \text{ și } g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8; m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a) $f : E \rightarrow F$, $f(x) = 10x$;

b) $g : \{-1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}$, $g(x) = x^2$;

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$.

2. Se consideră funcția $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 5x$. Numiți:

a) domeniul de definiție; b) domeniul de valori; c) legea de corespondență.

b) Se consideră funcțiile $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = -x$ și $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x^3$. Arătați că $f \neq g$.

c) Se consideră funcțiile $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x$ și $h: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, $h(x) = x^7$. Arătați că $g = h$.

20. Se consideră funcția $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Arătați că următoarele formule descriu funcția f :

a) $f(x) = 1 - x$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = x^3 + 1$.

21. Se consideră funcția $g: \left\{-1, \frac{1}{7}, 1, 7\right\} \rightarrow \left\{-1, \frac{1}{7}, 1, 7\right\}$. Stabiliți care dintre următoarele formule descriu funcția g :

a) $g(x) = x$; b) $g(x) = x^{-1}$; c) $g(x) = |x|$.

22. Se consideră funcția $f: \{-5, -3, 1, 4\} \rightarrow B$. Determinați $\text{Im } f$, dacă:

a) $f(x) = |x + 1|$; b) $f(x) = |x - 1|$.

23. Se consideră funcția $f: \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\} \rightarrow C$. Determinați $\text{Im } f$, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

24. Se consideră funcția $r: \{24, 25, 28, 43, 59\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție restul împărțirii lui la 7. Determinați cardinalul mulțimii $\text{Im } r$.

25. Se consideră funcția $g: \{13, 14, 15, 16, 25\} \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție numărul său de divizori naturali. Câte submulțimi are mulțimea $\text{Im } g$?

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Arătați că $f(x)[f(x + 1) + 1] + 1 \geq 0$.

27. Se consideră funcția $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(n) = (-1)^n \cdot n$. Calculați suma $S = g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(101)$.

28. Se consideră funcția $h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, $h(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Calculați produsul $P = h(1) \cdot h(2) \cdot h(3) \cdot \dots \cdot h(100)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

29. Se consideră funcția $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = 2x + 1$. Arătați că $n \in \mathbb{N}$, dacă:

a) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(100)}$; b) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(123)}$.

30. Arătați că nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să îndeplinească condiția:

$$f(1 + x) + f(1 - x) = x.$$

Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice



Citesc și rețin

Definiție: Funcția de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește **funcție liniară**.

Reprezentarea grafică a funcției liniare este o dreaptă.

Definiție: Pentru $a \neq 0$, funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește **funcție de gradul I**.

Intersecțiile graficului funcției de gradul I cu axele de coordonate

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$- G_f \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right);$$

$$- G_f \cap Oy = B(0; b).$$



Cum se aplică?

1. Determinați punctul de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{4} - 1$ care are coordonatele egale.

Soluție:

Determinăm punctul $M(x; f(x)) \in G_f$ cu proprietatea $x = f(x)$, deci $^4)x = \frac{x}{4} - 1$ sau

$$4x = x - 4, \text{ așadar } 3x = -4, \text{ de unde obținem } x = -\frac{4}{3}, \text{ prin urmare } M\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

2. Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2$.

Soluție:

Scriem tabelul de valori al funcției g pentru $x = 1, x = 2$ și $x = 3$.

x	1	2	3
$g(x)$	3	4	5

Deci, graficul funcției g conține punctele $A(1; 3), B(2; 4)$ și $C(3; 5)$. Reprezentăm aceste puncte în sistemul de axe ortogonale xOy și construim graficul.

